1 Určité integrály

Věta 1 (z minulého semestru)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a nechť F je primitivní funkce k f na (a,b), potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

Definice 2 (Newtonův integrál)**.** *Nechť f je definována na intervalu (a,b), $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a<b$, a má na (a,b) primitivní funkci F. Definujeme* **Newtonův integrál** *z funkce f na od a do b jako*

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

pokud má výraz na pravé straně smysl.

Výraz $\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$ nazýváme přírůstkem funkce F od a do b a zkráceně jej značíme $[F(x)]_a^b$.

Poznámky a příklady. *1. Je-li $(N)\int_a^b f\in\mathbb{R}$, pak říkáme, že f je newtonovsky integrovatelná na (a,b), nebo také, že daný Newtonův integrál konverguje. Množinu všech newtonovsky integrovatelných funkcí značíme $\mathcal{N}((a,b))$.*

2. Platí

$$\int_0^1 x^p\,dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}, & p+1>0,\\ [\log x]_0^1 = \infty, & p+1=0,\\ \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \infty, & p+1<0, \end{cases}$$

a

$$\int_1^\infty x^p\,dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^\infty = \infty, & p+1>0,\\ [\log x]_1^\infty = \infty, & p+1=0\\ \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{p+1}, & p+1<0. \end{cases}$$

Speciálně dostáváme, že Newtonův integrál může být konečný i pro neomezené funkce a i pro neomezené intervaly. Rovněž takto snadno dostaneme funkci, pro kterou platí $(N)\int_0^1 f\in\mathbb{R}$, ale $(R)\int_0^1 f$ neexistuje.

3. Na druhou stranu, např. pro funkci $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $x\in[-1,1]$, platí, že $(R)\int_{-1}^1 f$ existuje, ale $(N)\int_{-1}^1 f$ není definován, protože f nemá na $(-1,1)$ primitivní funkci.

4. (per partes pro Newtonův integrál) Nechť mají funkce f a g na intervalu (a,b), $a<b$, primitivní funkci F, resp. G. Potom

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx,$$

má-li pravá strana smysl.

5. *(substituce pro Newtonův integrál) Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $\varphi : (\alpha,\beta) \overset{na}{\to} (a,b)$ má vlastní na (α,β) a $\varphi' > 0$ (nebo $\varphi' < 0$) na (α,β). Potom*

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_\alpha^\beta |\varphi'(x)| \cdot f \circ \varphi(x)\,dx,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Věta 3 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Je-li $f \in \mathfrak{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}((a,b))$, potom*

$$(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f.$$

2 Aplikace určitého integrálu

Nechť $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ je křivka a nechť $D \in \mathfrak{D}([a,b])$ je dělení s dělícími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Potom definujeme

$$L(\gamma, D) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(x_{i+1}) - \gamma(x_i)|,$$

kde $|a - b|$ je eukleidovská vzdálenost definovaná jako

$$|a - b| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}.$$

Délku křivky γ pak definujeme jako

$$l(\gamma) = \sup_{D \in \mathfrak{D}([a,b])} L(\gamma, D).$$

Speciálním případem je délka grafu funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Takový graf má přirozenou parametrizaci $\gamma : t \mapsto (t, f(t))$, $t \in [a,b]$. Pro tento speciální případ jsme za předpokladu, že f' je spojitá na $[a,b]$ (tj., f lze rozšířit na otevřený nadinterval intervalu $[a,b]$ na spojitě diferencovatelnou funkci) odvodili vzoreček

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)}\,dx.$$

Dále jsme definovali tzv. gamma funkci $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

a dokázali jsme

- $\Gamma(1) = 1$ (přímým výpočtem),
- $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ (per partes),
- $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$ (vyplývá z předchozích dvou vlastností),
- Γ je skutečně dobře definovaná na $(0,\infty)$ (tj. integrál konverguje).

3 Diferenciální rovnice

Definice 4 (Obyčejná diferenciální rovnice)**.** *Obyčejnou diferenciální rovnicí (krátce ODR) budeme nazývat rovnici ve tvaru*

$$F(f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x), \dots, f'(x), f(x), x) = 0, \tag{ODR}$$

kde $F : \mathbb{R}^{n+2} \supseteq D_F \to \mathbb{R}$ *je nějaká funkce.*

Definice 5 (Řešení ODR)**.** *Funkci* f *definovanou na neprázdném otevřeném intervalu* I *nazýváme řešením rovnice* (ODR)*, pokud má ve všech bodech* I *vlastní derivaci až do řádu* n *a ve všech bodech* x *splňuje rovnici* (ODR)*.*

Maximálním řešením rovncie (ODR) *nazýváme takové její řešení* f*, že neexistuje jiné její řešení* g *splňující* $D_f \subsetneq D_g$*.*

Poznámky a příklady.

1. *Neznámou funkci často označujeme* $y(x)$ *a často také vynecháváme proměnnou* x*. Rovnice, které splňují naši definici jsou například*

$$y' - y = 0, \quad y'' + y = 0, \quad (y''')^2 y - \sin x = 0,$$

(zde by odpovídající funkce F *na levé straně byly* $F(u, v, w) = u - v$*,* $F(u, v, w, z) = u^2 + w$ *a* $F(u, v, w, z, t) = u^2 w - \sin t$*). Například rovnice* $y'(y) = 0$ *ale definici nesplňuje.*

2. *Řádem rovnice* (ODR) *označujeme takové* k*, že* $f^{(k)}$ *je nejvyšší derivace, která se netriviálně v rovnici vyskytuje (obecně spíše neformální, ale v konkrétních případech bude dávat dobrý smysl).*

Rovnici (ODR) *pak často uvažujeme i ve tvaru rozřešeném vzhledem k nejvyšší derivaci, tedy ve tvaru*

$$f^{(n)}(x) = G(y^{(n-1)}, \dots, f', f, x). \tag{1}$$

Rovněž často uvažujeme vektorovou ODR (soustavu), kde pro nás bude základním příkladem soustava rovnice 1. *řádu vyřešená vzhledem k (první) derivaci*

$$\begin{aligned} f_1' &= F_1(f_1, \dots, f_n, x), \\ f_2' &= F_2(f_1, \dots, f_n, x), \\ &\vdots \\ f_n' &= F_n(f_1, \dots, f_n, x), \end{aligned} \tag{2}$$

případně ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{f}' = \mathbf{F}(\mathbf{f}, x),$$

kde

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n), \quad \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n).$$

Každou rovnici tvaru (1) můžeme ekvivalentně zapsav ve tvaru (2) pomocí substituce

$$g_1 = f, \quad g_2 = f', \dots, g_n = f^{(n-1)},$$

ta pak dává

$$\begin{aligned} g_1' &= g_2, \\ g_2' &= g_3, \\ &\vdots \\ g_n' &= G(g_n, g_{n-1}, \dots, g_1, x). \end{aligned}$$

Např. rovnici $y'' = -y$ můžeme takto (pomocí $y_1 = y$ a $y_2 = y'$) převést na soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1. \end{aligned}$$

Tu pak můžeme zapsat i v maticovém zápisu

$$\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y},$$

kde

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1 Rovnice 1. řádu

Začneme z rovnicemi 1. řádu, ty budeme zpravidla uvažovat ve tvaru rozřešeném vzhledem k (první) derivaci, tedy

$$y' = F(x, y).$$

Popisují zpravidla růst/pokles nějaké veličiny, např.

$$y' = ay,$$

pro $a > 0$ neomezený růst populace, pro $a < 0$ jednoduchý model chemické reakce,

$$y' = ay\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

omezený růst populace, kde M udává maximální kapacitu prostředí. Prvním speciálním druhem budou tzv. rovnice se separovanými proměnnými, tedy rovnice ve tvaru

$$y' = f(x)g(y). \tag{SP}$$

Úmluva: kdykoliv řekneme interval, budeme mít na mysli neprázdný otevřený interval.

Věta 6 (řešení rovnice (SP))**.** *Nechť*

- *f je spojitá na intervalu I,*

- *g je spojitá a nenulová na intervalu J,*
- *F je primitivní funkce k f na I,*
- *G je primitivní funkce k $\frac{1}{g}$ na J,*

Potom:

1. *jsou-li $C \in \mathbb{R}$ a interval $I^* \subseteq I$ voleny tak, aby platilo*

$$F(x) + C \in D_{G^{-1}}, \quad x \in I^*$$

pak je funkce

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C), \quad x \in I^* \tag{3}$$

řešením rovnice (SP).

2. *Volme $x_0 \in I$ a $y_0 \in J$ a položme*

$$F^*(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad G^*(y) = \int_{y_0}^{y} f(t)\,dt.$$

Potom je funkce

$$y^*(x) = (G^*)^{-1}(F^*(x))$$

řešením rovnice (SP) *na okolí bodu x_0 splňujícím $y^*(x_0) = y_0$ (tj. y^* je řešením tzv. Cauchyovy úlohy). Navíc, pokud je z řešení rovnice* (SP) *splňující $z(x_0) = y_0$, potom existuje okolí budu x_0, na kterém platí $z = y^*$.*

Jak dostaneme pomocí Věty 6 maximální řešení? Nejprve si všimneme, že pro každý nulový bod C funkce g je $y(x) = C$, $y \in I \subset D_f$ řešením (SP) (tzv. stacionální řešení). Pokud ve Větě 6 navíc platí:

- I je nějaký maximální interval v D_f,
- J maximální interval v D_g mínus nulové body g,
- I^* maximální interval splňující (3),

potom je řešení $y(x) = G^{-1}(F(x)+C)$ maximální v následujícím smyslu: je-li α krajní bod I^* (řekněme levý) potom buď $\alpha \notin D_f$, $\lim\limits_{x\to\alpha+} y(x)$ existuje, ale neleží v D_g (v těchto případech už nelze řešení za tento krajní bod prodloužit), nebo lze řešení y spojitě navázat na stacionární řešení ve tvaru $\tilde{y} = C$ pro nějaké $C \in \mathbb{R}$, $g(C) = 0$. V posledním případě můžeme řešení y prodloužit (jako řešení (SP)) pomocí následující věty

Věta 7 (o lepení pro (SP)). *Nechť*

- *z je řešení rovnice* (SP) *na intervalu (a, b),*
- *w je řešení rovnice* (SP) *na intervalu (b, c),*

- $\lim\limits_{x \to b-} z(x) = L = \lim\limits_{x \to b+} w(x)$,
- *f je spojitá v b a g je spojitá v L.*

Potom je funkce

$$y(x) = \begin{cases} z(x), & x \in (a, b), \\ L, & x = b, \\ w(x), & x \in (b, c) \end{cases}$$

řešením rovnice (SP) *(na intervalu (a, c)).*

Poznámky. *Předchozí věta platí obecněji pro rovnice $y' = F(x, y)$, kde místo spojitosti f a g, předpokládáme spojitost F v (b, L).*

Věta 6 a Věta 7 jsou tak podkladem pro následující 6 krokový postup pro řešení rovnic ve tvaru (SP):

krok 1. najdeme všechny maximální intervaly I_k v definičním oboru D_f,

krok 2. najdeme všechny maximální intervaly J_l v definičním oboru D_g sjednoceném s nulovými body g (tj. v definičním oboru $\frac{1}{g}$),

krok 3. určíme stacionární řešení odpovídající nulovým bodům funkce g (na intervalech I_k),

krok 4. pro každý interval I_k najdeme odpovídající primitivní funkci F a pro každý interval J_l odpovídající primitivní funkci G

krok 5. pro každou dvojici (I_k, J_l) a $C \in \mathbb{R}$ najdeme všechny maximální intervaly I^* a jim odpovídající řešení $y = G^{-1}(F + C)$ podle Věty 6,

krok 6. řešení případně slepíme podle Věty 7, abychom dostali všechna maximální řešení.

3.1.1 Lineární rovnice 1. řádu

Lineární rovnicí 1. řádu budeme nazývat rovnici

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{L1}$$

kde a a b jsou spojité funkce nanějakém intervalu (α, β). Následující věta dává návod, jak u rovnice (L1) nalézt obecné řešení.

Věta 8 (řešení rovnice (L1))**.** *Nechť*

- *A je primitivní funkce k funkce a na (α, β),*
- *B je primitivní funkce k funkce be^A na (α, β).*

Potom y je obecné řešení rovnice (L1) *na intervalu (α, β) právě tehdy, když existuje $C \in \mathbb{R}$, že*

$$y = Be^{-A} + Ce^{-A}.$$

Pokud bychom hledali řešení splňující pro nějaká $x_0 \in (\alpha, \beta)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ stačí zvolit A, B a C ve větě jako

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt, \quad B(x) = \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)}\, dt \quad \text{a} \quad C = y_0.$$

3.1.2 Lineární rovnice obecného řádu

Budeme uvažovat rovnice ve tvaru

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x), \tag{L}$$

kde $f, a_0, \ldots a_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité, $a_n(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$.

Takovou rovnici vždy můžeme upravit do tvaru vyřešeného vzhledem k n-té derivaci (proměnnou x už budeme zpravidla vynechávat)

$$f^{(n)} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} y^k.$$

To například okamžitě implikuje, že každé řešení y musí být nejen diferencovatelné, ale musí mít i spojitou derivaci řádu n. V tomto ohledu se nám bude hodit i následující značení (analogické ke značení $C((a,b))$): pro $n \in \mathbb{N}$ budeme označovat

$$C^n((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} : f^{(n)} \text{ je spojitá na } (a,b)\}.$$

Množina $C^n((a,b))$ (stejně jako $C((a,b))$) tvoří (s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce konstantou) vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Homogenní (lineární) rovnice

Začneme s případem, kde je pravá strana rovnice (L) (funkce f) identicky rovna 0, tj. s rovnicí ve tvaru

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0. \tag{Lh}$$

Zde (díky linearitě rovnice) platí, že množina všech řešení (Lh) na (a,b) tvoří podprostor vektorového prostoru $C^n((a,b))$. Při studiu těchto rovnic využijeme následující obecnou větu, jejíž důkaz zatím odložíme

Věta 9 (existence a jednoznačnost řešení rovnice (L))**.** *Nechť $f, a_0, \ldots, a_n \in C((a,b))$, $a_n \neq 0$ na (a,b), $x_0 \in (a,b)$, $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Potom existuje právě jedno řešení y rovnice* (L) *na (a,b), pro které platí*

$$y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

První informací o prostoru řešení rovnice (Lh) bude následující věta

Věta 10 (prostor řešení rovnice (Lh))**.** *Dimenze prostoru všech řešení rovnice* (Lh) *(na intervalu (a,b)) je n.*

Definice 11 (fundamentální systém)**.** *Libovolonou bázi prostoru řešení rovnice* (Lh) *budeme nazývat fundamentálním systémem rovnice* (Lh)*.*

Při studiu prostoru řešení rovnice (Lh) (a rovněž (L)) nám pomůže následující pojem:

Definice 12 (Wronského determinant)**.** *Pro* $u_1, \dots, u_n \in C^{n-1}((a,b))$ *a* $x \in (a,b)$ *definujeme Wronského determinant (Wronskián) jako*

$$W(x) = W_{u_1,\dots,u_n}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x), & \cdots, & u_n(x) \\ u_1'(x), & \cdots, & u_n'(x) \\ \vdots, & \ddots, & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Věta 13 (vlastnosti Wronskiánu)**.** *Nechť* $u_1, \dots, u_n \in C^n((a,b))$ *jsou řešení rovnice* (Lh)*, potom* $W'(x) = -\dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x)$*,* $x \in (a,b)$*.*

Poznámky a příklady. *1. Wronskián tedy, za předpokladu, že* $u_1, \dots, u_n$ *jsou řeeními rovnice* (Lh)*, splňuje jednoduchou lineární diferenciální rovnici* 1. *řádu, kterou snadno vyřešíme. Je-li* $x_0 \in (a,b)$ *potom platí*

$$W(x) = W(x_0)e^{A(x)}, \quad kde \quad A(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\, dt. \tag{4}$$

Speciálně dostáváme, že v tomto případě platí

$$\exists\, x \in (a,b) : W(x) = 0 \iff \forall\, x \in (a,b) : W(x) = 0.$$

Poslední vzorec nám rovněž dává metodu snižování řádu v následujícím smyslu: uvažme rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{5}$$

Snadno uhádneme, že funkce e^x *je jejím řešením. Víme, že musí existovat další lineárně nezávislé řešení. To už ale hádat nemusíme, stačí si uvědomit, že Wronskián můžeme spočítat dvěma způsoby. Jednak z definice (je-li* y *řešení* (5)*)*

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x, & y \\ (e^x)', & y' \end{pmatrix} = e^x(y' - y),$$

a druhak pomocí (4)*, což dává, že existuje* $C \in \mathbb{R}$*, že*

$$W(x) = Ce^{2x}.$$

Porovnáním dostaneme, že

$$y' - y = Ce^x.$$

To je rovnice 1. řádu, kterou snadno vyřešíme, její obecné řešení má tvar

$$y = Dxe^x + Ce^x.$$

Odtud už pak snadno odvodíme, že fundamentální systém rovnice je např. $\{e^x, xe^x\}$.

Věta 14 (lineární nezávislost a Wronskián)**.** *Nechť* $u_1, \ldots, u_n \in C^n((a,b))$ *jsou řešení rovnice* (Lh)*, potom* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *je fundamentálním systémem rovnice* (Lh) *právě tehdy, když existuje* $x \in (a,b)$*, že* $W(x) \neq 0$.

3.2 Nehomogenní rovnice - variace konstant

Nechť y_p je řešení rovnice (L) (na (a,b)), potom obecné řešení rovnice (L) (na (a,b)) má tvar

$$y = y_p + y_h,$$

kde y_h je obecné řešení rovnice (Lh). Metoda variace konstant znamená, že hledáme řešení y_p ve tvaru

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x),$$

kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (Lh).

Věta 15 (variace konstant)**.** *Nechť* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *je fundamentální systém rovnice* (Lh) *a nechť funkce* $C_1, \ldots C_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ *splňují pro* $x \in (a,b)$ *soustavu*

$$\begin{pmatrix} y_1(x), & \cdots, & y_n(x) \\ \vdots, & \ddots, & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Potom funkce $y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x)$ *je řešením rovnice* (L).

3.3 Rovnice s konstantními koeficienty

Nyní se budeme věnovat otázce, jak najít fundamentální systém pro rovnici (Lh) za předpokladu, že a_n jsou konstantní funkce (toto předpokládáme po zbytek kapitoly).

Základní myšlenka je, že řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, pro takovou funkci totiž platí, že je řešením rovnice (Lh) právě tehdy, když je λ řešením rovnice

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Polynomu na levé straně této rovnice se zpravidla říká charakteristický polynom (příslušný rovnici (Lh)). Má-li ale charakteristický polynom vícenásobné nebo komplexní kořeny, není možné z funkcí tvaru $e^{\lambda x}$ sestavit fundamentální systém celý.

V obecném případě hledáme fundamentální systém následovně:

- nejprve najdeme kořeny charakteristického polynomu

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

- za každý reálný kořen λ násobnosti k přidáme do fundamentálního systému funkce

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x},$$

- za každou dvojici komplexně sdružených kořenů $\alpha \pm \beta i$ násobnosti k přidáme do fundamentálního systému funkce

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x), x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Poznamenejme, že p je stupně n a tedy má včetně násobnosti n kořenů. Rovněž platí, že komplexní kořeny se musí vyskytovat ve dvojici komplexně sdružených čísel stejné násobnosti.

Speciální pravá strana

Máme-li nalezen fundamentální systém rovnice (Lh) můžeme nalézt řešení rovnice (L) pomocí variace konstant. Je-li ale pravá strana ve speciálním tvaru. můžeme (u rovnic s konstantními koeficienty) nalézt řešení následujícím postupem:

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

kde P a Q jsou polynomy. Možné tvary takové pravé strany jsou například

$f(x) = x^{31}$,	pro $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P(x) = x^{31}$, $Q(x) = 0$
$f(x) = (x+1)e^x$,	pro $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P(x) = x + 1$, $Q(x) = 0$
$f(x) = (x^2 - x)e^{-2x}\sin 4x$,	pro $\alpha = -2$, $\beta = 4$, $P(x) = 0$, $Q(x) = x^2 - x$

Partikulární řešení y_p pak hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^k\left[R(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + S(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}\right],$$

kde $\deg_R, \deg_S \leq \max(\deg_P, \deg_Q)$ a k je násobnost kořene $\alpha + \beta i$ v charakteristickém polynomu odpovídajícímu levé strané.

Například pro rovnici

$$y'' - 2y' + 2 = (x^2 + 1)e^x\sin x$$

platí

- charakteristický polynom má tvar $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ a kořeny $1 \pm i$,
- fundamentální systém homogenní rovnice tedy bude mít tvar $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$,
- pravá strana má speciální tvar pro
$$\alpha = \beta = 1, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = x^2 + 1,$$
násobnost kořenu $\alpha + \beta i$ v charakteristickém polynomu je 1
- partikulární řešení tedy hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = x\left[(Ax^2 + Bx + C)e^x \cos x + (Dx^2 + Ex + F)e^x \sin x\right].$$

4 Číselné řady

Definice 16 (číselná řada a její součet). *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ budeme nazývat nekonečnou řadou, čísla $s_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ pak jejími čatečnými součty.*

Existuje-li limita $s = \lim\limits_{N\to\infty} s_N$, nazýváme ji souštem řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$). Říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

- *konverguje, pokud $s \in \mathbb{R}$,*
- *diverguje, pokud nekonverguje,*
- *diverguje k $\pm\infty$, pokud $s = \pm\infty$,*
- *osciluje, pokud není s definováno.*

Poznámky a příklady. *1. Platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{konverguje, pokud } |q| < 1, \\ \text{diverguje k } +\infty, \text{ pokud } q \geq 1, \\ \text{v ostatních případech osciluje.} \end{cases}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konverguje, pokud } \alpha > 1, \\ \text{v ostatních případech diverguje k } +\infty. \end{cases}$$

2. *Budeme (podobně jako u posloupností) používat i řady začínající jiným indexem než $n = 1$. Platí (pro libovolné $k \in \mathbb{N}$) že*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje.}$$
Konvergence řady tedy nezávisí na konečně mnoha členech (případný součet však pochopitelně ano).

3. (aritmetika řad) pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B,$$

pokud má pravá strana smysl. Speciálněe pro $\alpha \neq 0$ *platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \quad \textit{konverguje.}$$

4.1 Řady s kladnými členy

Tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro které platí $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Limita $\lim_{N\to\infty} s_N$ v tomto případě (z důvodu monotonie) vždy existuje - buď konečná, nebo $+\infty$ - proto často píšeme

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 17 (nutná podmínka konvergence řady). *Pokud nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta 18 (srovnávací kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s kladnými členy a předpokládejme, že existuje* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že* $b_n \geq a_n$*,* $n \geq N$*. Potom*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*, nebo ekvivalentně*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Věta 19 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s kladnými členy a* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L$*. Potom*

1. *pokud* $L > 0$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,

2. *pokud* $L < \infty$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,

3. *pokud* $L \in (0, \infty)$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

Věta 20 (podílové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a* $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Potom*

1. *pokud* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,

2. *pokud* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Věta 21 (odmocninové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a* $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Potom*

1. *pokud* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,

2. *pokud* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Důležité limity: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Například podle podílového i odmosninového kritéria snadno dostaneme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < 0.$$

v případě, že $L = 1$, nedávají kirtéria o konvergenci žádnou informaci, nejsou tedy schopna odhalit divergenci ani zjevně divergující řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, kterou nejsou schopna odlišit od konvergující řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Poznamenejme ještě, že ve formulaci odmocninového kritéria můžeme v definici L nahradit limitu limes superior.

Věta 22 (integrální kritérium). *Nechť* $N \in \mathbb{N}$ *a* $f : [N, \infty) \to [0, \infty)$ *je nerostoucí a spojitá na intervalu* $[N, \infty)$. *Pokud* $a_n = f(n)$, $n \geq N$, *potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \quad \iff \quad (N) \int_N^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Například konvergence integrálu $\int_2^\infty \frac{1}{x\log^2 x}\,dx$ tedy implikuje konvergenci řady $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log^2 n}$.

4.2 Řady s obecnými členy - alternující řady

Jde o řady de tvaru $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$, kde $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Definice 23 (absolutní konvergence)**.** *Říkáme, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *konverguje absolutně, pokud platí* $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty$.

Věta 24 (konvergence a absolutní konvergence)**.** *Pokud řada* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *konverguje absolutně, potom konverguje.*

Věta 25 (Leibnizovo kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *je nerostoucí posloupnost splňující* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Potom řada* $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$ *konverguje.*

Řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje, ale nekonverguje absolutně. Je dobré si všimnout, že řady jak kladných částí, tak záporných částí této řady obě divergují k $+\infty$. Takto je to vždy v případě konvergentních řad, které nekonvergují absolutně.

Platí následující tvrzení: pokud řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně (v takovém případě říkáme, že konverguje neabsolutně) potom

$$\sum_{n=1}^\infty (a_n)_- = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^\infty (a_n)_+ = \infty,$$

kde $x_\pm = \max(\pm x, 0)$ značí kladnou a zápornou část x.

Na druhou stranu platí následující charakterizace absolutní konvergence:

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\left(\sum_{n=1}^\infty (a_n)_- < \infty\right) \wedge \left(\sum_{n=1}^\infty (a_n)_+ < \infty\right)\right].$$

Neabsolutně konvergentní řady mají i následující pozoruhodnou vlastnost: pokud řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně a $s \in \mathbb{R}^*$, potom existuje bijekce $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s.$$

Takovou řadu označujeme za přerovnání řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a speciálně tedy platí, že u neabsolutně konvergentních řad součet na přerovnání závisí.

U absolutně konvergentních řad je situace opět naprosto opačná. Je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, potom pro každou bijekci $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Součet tedy v tomto případě na přerovnání nezávisí.

Věta 26 (Abelovo a Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti s reálnými členy, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní.*

Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *(Dirichlet) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená,*
- *(Abel) posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje,*

potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

4.3 Součin řad

Definice 27 (Cauchyův součin řad). *Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou nekonečné řady, potom jejich Cauchyův součin definujeme jako řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, kde*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

Věta 28 (součin řad). *Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní řady se součty A, resp. B, potom jejich Cauchyův součin konverguje absolutně a má součet $A \cdot B$.*

Pro (neabsolutně konvergentní řadu) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ platí, že limita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n-k+1}$$

neexistuje, součin této řady se sebou samou tedy nekonverguje. Pokud položíme

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

potom (po úpravách za využití binomické věty a předchozí věty o součinu řad) dostaneme

$$\begin{aligned}\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).\end{aligned}$$

Stačí ještě dokázat, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1,$$

a budeme konečně mít dobře definovanou exponenciální funkci. Porovně můžeme definovat

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4.4 Posloupnosti a řady komplexních čísel

Posloupnosti a řady komplexních čísel definujeme analogicky k reálnému případu. Posloupností myslíme zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a opět používáme značení a_n místo $f(n)$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Limitu definujeme obdobně (pro $L \in \mathbb{C}$)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Zde používáme obvyklé značení $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Nekonečné řady a jejich součty definijeme opět analogicky k reálnému případu (používáme limity částečných součtů).

Je dobré si uvědomit, že v jistém smyslu nejde v zásadě o nic nového, protože řady komplexních čísel můžeme studovat po složkách, platí totiž

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n i) = a + bi \quad \iff \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a\right) \wedge \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b\right).$$

Speciálně tedy platí, že vyšetřování konvergence řad komplexních čísel lze (alespoň teoreticky) převést na vyšetrování konvergence řad reálných čísel. Rovněž stále platí nutná podmínka konvergence $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a i tvrzení

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje (tj. má součet v } \mathbb{C}\text{).}$$

Platí i věta o součinu řad (pro absolutně konvergentní řady). Speciálně tedy můžeme rozšířit definici exponenciální funce na $\mathbb{C}$ a bude stále platit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Odtut snadno odvodíme

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Toho jsme využili k důkazu následujícího užitečného tvrzení: je-li $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, potom mají řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$$

omezené posloupnosti částečných osučtů. V kombinaci s Dirichletovým kritériem tedy dostaneme například konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

5 Mocninné řady

Definice 29 (mocninná řada). *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost kompexních čísel a $z_0 \in \mathbb{C}$. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ budeme nazývat mocninnou řadou se středem z_0.*

Poznámky a příklady. *1. Formálním dosazením konkrétní hodnoty $z \in \mathbb{C}$ do mocninné řady dostaneme klasickou číselnou řadu, kterou můžeme studovat obvyklými metodami.*

2. Napříkad volbou $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme geometrickou řadu, pro tu platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} \textit{konverguje absolutně pro } |z| < 1 \\ \textit{nespňuje nutnou podmínku konvergence pro } |z| > 1. \end{cases}$$

Volbou $a_n = \frac{1}{n!}$ dostaneme řadu definující exponenciální funkci, která konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Věta 30 (poloměr konvergence). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je mocninná řada a $z \in \mathbb{C}$. Položme $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ (s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$ a $\frac{1}{0} = \infty$). Potom*

1. *pokud* $|z - z_0| < R$, *potom (číselná) řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *konverguje absolutně,*

2. *pokud* $|z - z_0| > R$, *potom (číselná) řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *diverguje (řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence).*

Poznámky a příklady. 1. *Hodnotě* R *z předchozí věty říkáme poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. *Podmínky* (1) *a* (2) *určují poloměr konvergence jednoznačně.*

2. *Pokud existuje limita* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *potom je její hodnota rovna poloměru konvergence.*

3. *Pro řadu* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *platí* $R = 1$, *pro řadu* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *platí* $R = \infty$.

Věta 31 (derivace mocninné řady). *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* R. *Pro* $x \in (-R, R)$ *položme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Potom pro $x \in (-R, R)$ *existuje vlastní* $f'(x)$ *a platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Navíc platí, že mocninná řada napravo má poloměr konvergence R.

Poznámky a příklady. 1. *Větu můžeme aplikovat opakovaně, čímž speciálně dostaneme, že řada* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *definuje na intervalu* $(-R, R)$ *nekonečněkrát (spojitě) diferencovatelnou funkci.*

2. *Pro* $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, *platí*

$$(\exp(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(x).$$

Protože $\exp(0) = 0$, *dostáváme speciálně*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

Tím jsme konečně dokončili důkaz existence a jednoznačnosti exponenciální funkce.

3. *(integrace mocninné řady) Věta má i svou integrální verzi: pokud* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, *potom*

$$\int f \overset{c}{=} g \quad na\ (-R, R).$$

4. *(verze pro určitý integrál) Pro* $-R < a < b < R$ *platí (pro Newtonův i Riemannův integrál)*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx.$$

5. *Větu často používáme ke sčítání číselných řad. Například snadno ověříme, že pro* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

a tedy

$$f(x) \overset{c}{=} -\log(1-x), \quad |x| < 1.$$

Porovnáním hodnot v bodě 0 *(*$f(0) = 0$ *a* $-\log(1-0) = 0$*) pak dostaneme integrační konstantu rovnu nule a platí* $f(x) = -\log(1-x)$, $|x| < 1$. *Tedy například pro číselnou řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$ *dostaneme součet* $-\log(\frac{5}{4})$.

Je pozoruhodné, že ačkoliv je výsledná fukce $-\log(1-x)$ *definována v bodě* -1 *a mocninná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *rovněž konverguje v bodě* -1 *(podle Leibnizova kritéria), nemůžeme podle věty usoudit, že platí* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$.

Tato rovnost ovšem skutečně platí a je důsledkem následujícího tvrzení známého jako Abelova věta: nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* R. *Potom platí* *(a) pokud konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$*, potom platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(b) pokud konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$*, potom platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n = \lim_{x \to R+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

6. *Pro* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*,* $x \in (-R, R)$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Dosazením $x = 0$ *dostaneme* $f^{(k)}(0) = k! a_k$*, tedy rovněž platí* $a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$ *a dostáváme koeficienty, které dobře známe z Taylorových polynomů. Platí tedy, že funkce zadaná mocninnou řadou je v kruhu konvergence součtem tzv. Taylorovy řady (se stejným středem), ve smyslu následující definice.*

Definice 32 (Taylorova řada)**.** *Nechť f je funkce, která je nekonečněkrát diferencovatelná v bodě* x_0*. Porom definujeme její Taylorovu řadu se středem v bodě* x_0 *jako*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Obecně neplatí, že by funkce měla být součtem své mocninné řady (i když tato konverguje) kdekoliv mimo střed x_0. Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

splňuje $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ a tedy příslušná Taylorova řada se středem v bodě 0 konverguje na $\mathbb{R}$ k hodnotě 0, nicméně $f(x) \neq 0$, $x \neq 0$.

Taylorovy řady nemusíme nutně počítat z definice, ale čato můžeme využít naše poznatky z teorie mocninných řad (na základě výše uvedené poznámky), například pro funkci $f(x) = \arctan x$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

a tedy (po určení integrační konstanty)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Mocninná řada napravo je pak už nutně Taylorovou řadou funkce $\arctan x$ se středem v bodě 0.

Definice 33 (reálně analytická funkce)**.** *Říkáme, že funkce f definovaná na otevřeném intervalu I je reálně analytická (na I), pokud pro každé $x_0 \in I$ existuje $\delta > 0$, že f je součtem své Taylorovy řady se středem v bodě x_0 na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Například funkce $\log x$ je reálně analytickou funkcí na intervalu $(0, \infty)$. Její Taylorovu řadu pro obecné $x_0 \in (0, \infty)$ (jejímž je pak nutně součtem na $(x_0 - R, x_0 + R)$, kde R je příslušný poloměr konvergence) jsme spočítali (metodou podobnou výše uvedenému výpočtu u funkce $\arctan x$) jako

$$\log(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x_0^{n+1}} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Poloměr konvergence je zjevně roven x_0.

Pro reálně analytické funkce tedy platí násladující: jsou-li f a g reálně analytické na okolí bodu x_0 a platí $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, $n = 0, 1, \ldots$, potom $f = g$ na okolí bodu x_0.

Jinými slovy: mocninné řady se shodují, právě tehdy, když se shodují všechny jejich koeficienty. To můžeme použít například při řešení diferenciálních rovnice, kde (za předpokladu existence reálně analytického řešené), můžeme hledat řešení ve tvaru mocninné řady.

Zkusíme nalézt řešení rovnice $y'' = y$ ve tvaru mocninné řady. Předpokládejme, že $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potom

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Protože dvě mocninné řady se rovnají právě tehdy, když se rovnají všechny jejich koeficienty, bude y řešením rovnice právě tehdy, když bude platit

$$a_{n-2} = n(n-1)a_n, \quad n \geq 2.$$

Opakovaným využitím tohoto vztahu dostaneme podmínky

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!} \quad \text{a} \quad a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!}. \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hodnoty a_0 a a_1 pak odpovídají počáteční podmínce

$$y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1.$$

Volbou $a_0 = 1$ a $a_1 = 0$ dostaneme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{argcosh} x,$$

volbou $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$ dostaneme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{argsinh} x.$$

Mocninné (Taylorovy) řady můžeme rovněž počítat pomocí pravidel, která známe z výpočtu Taylorových polynomů.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$
- $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$

6 Alternativní sčítací metody

Definice součtu nekonečné řady pomocí limity částečných součtů nemusí vždy vyhovovat našim potřebám. Existuje mnoho dalších způsobů, jak součet řady definovat a využívají se rovněž různé axiomatické přístupy, například můžeme požadovat platnost následujících axiomů

(N1) $\displaystyle (N)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha (N)\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta (N)\sum_{n=0}^{\infty} b_n,$

(N2) $\displaystyle (N)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + (N)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}.$

Z těchto axiomů například dostaneme

$$(N)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + (N)\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = 1 + x(N)\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

což dává

$$(N)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

za předpokladu, že $(N)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je dobře definována a vlastní. Zpravidla také požadujeme, aby platilo

$$(N)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

pokud řada konverguje v klasickém smyslu. Ukázali jsme si dvě metody, které tuto podmínku i oba axiomy (N1) a (N2) splňují (existují ale široce užívané sčítací metody, které například nesplňují axiom (N2)).

První byla Cesarovská sčítatelnost, kde definujeme

$$(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots s_n}{n+1},$$

pokud je limita napravo vlastní, Místo limity částečných součtů s_n tedy používáme limitu jejich aritmetických půměru (tzv. Cesarovskou limitu). Pomocí této metody jsme spočítali

$$(C)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$$

Druhá byla Abelovská sčítatalnost, kde definujeme

$$(A)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right),$$

pokud je limita napravo vlastní. Tuto limitu známe z Abelovy věty.

Jako příklad jsme spočítali

$$(A)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} n = \frac{1}{4}.$$

Rovněř jsem si ukázali, že tato řada není Cesarovsky sčítatelná (byla by ale sčítatelné Cesarovskou metodou druhého řádu, kde bychom počítali limitu aritmetických půměrů z aritmetických půměrů).

7 Metrické prostory

Definice 34 (Metrický prostor)**.** *Metrickým prostorem nazýváme dvojici* (M, ρ)*, kde* M *je množina a* $\rho : M \times M \to [0, \infty)$ *je zobrazení (tzv. metrika) spňující pro* $x, y, z \in M$*:*

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Na množině $\mathbb{R}$ máme například metriky

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad \text{nebo} \quad \rho(x, y) = \arctan|x - y| \tag{7}$$

obdobně můžeme vybavit množinu $\mathbb{R}^d$ metrikami

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{d}(x_n - y_n)^2}, \quad \text{nebo} \quad \rho(x,y) = \sum_{n=1}^{d}|x_n - y_n|, \tag{8}$$

které jsou speciálními případy metrik

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{d}|x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \tag{9}$$

případně metrikou

$$\rho(x,y) = \max_{n=1,\ldots,d}|x_n - y_n|, \tag{10}$$

která bývá často chápána jako limitní případ metrik v (9) pro $p = \infty$. Podobné metriky zavádíme i na prostorech posloupností

$$\rho(\{x_n\},\{y_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \tag{11}$$

na prostoru všech posloupností $\{x_n\}$ pro které platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$, případně

$$\rho(\{x_n\},\{y_n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n|, \tag{12}$$

na prostoru všech posloupností $\{x_n\}$ pro které platí $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty$ (tj. omezených posloupností).

Rovněž prostor $C([a,b])$ můžeme vybavit metrikami podobného typu

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b |f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{resp.} \quad \rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|. \tag{13}$$

Obecně rovněž platí, že libovolnou množinu můžeme vybavit metrikou (tzv. ultrametrikou)

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y, \\ 1, & \text{pokud } x \neq y. \end{cases} \tag{14}$$

Definice 35 (normovaný lineární prostor)**.** *Normovaným lineárním prostorem nazýváme dvojici $(V, ||\cdot||)$, kde V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $||\cdot|| : V \to [0,\infty)$ je zobrazení spňující pro $x,y \in V$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$) podmínky*

1. $||x|| = 0 \iff x = 0 \in V$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,

3. $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$.

Je-li $||\cdot||$ norma na V, potom $\rho(x,y) := ||x-y||$ je metrika na V (indukovaná normou $||\cdot||$). Příkladem takových metrik jsou všechny předchozí příklady mimo druhé metriky v (7) a ultrametriky v (14).

Je-li navíc V vektorový prostor vybavený skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$, můžeme vždy definovat normu na V jako $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. To je například případ metrik (9), (11) a (13) pro $p=2$.

V metrických a normovaných prostorech platí rovněž následující nerovnosti, které známe z $\mathbb{R}$:

$$|\rho(x,y) - \rho(x,z)| \le \rho(y,z), \qquad \big|||x|| - ||y||\big| \le ||x-y||$$

Analogicky k posloupnostem reálných a komplexních čísel definujeme i posloupnosti prvků obecné množiny M, tedy jako zobrazení z $\mathbb{N}$ do M.

Definice 36 (limita posloupnosti v metrickém prostoru)**.** *Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z M. Říkáme, že $x \in M$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzhledem k metrice ρ (píšeme $\rho - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$), pokud platí $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x) = 0$.*

Alternativně můžeme pochopitelně limitu posloupnosti definovat i známým výrokem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N : \rho(x_n,x) < \varepsilon.$$

Poznámky a příklady. *1. Posloupnosti mající limitu podle definice výše budeme nazývat konvergentní (v metrice ρ).*

2. Limita v metrickém prostoru je určena jednoznačně.

3. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^1,\dots,x_n^d)$, $n \in \mathbb{N}$ a $x = (x^1,\dots,x^d)$ platí

$$(\rho - \lim x_n = x) \iff \left(\lim x_n^i = x^i, \quad i = 1,\dots,d\right),$$

pokud ρ je kterákoliv z p-metrik na $\mathbb{R}^d$, $p \in [1,\infty]$.

Pro metriku

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{pokud } x = y,\\ 1, & \textit{pokud } x \ne y. \end{cases}$$

na M platí a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ platí

$$(\rho - \lim x_n = x) \iff (\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \ge N : x_n = x).$$

Definice 37 (ekvivalentní normy a metriky)**.** *Říkáme, že dvě metriky ρ a d na množině M jsou ekvivalentní, pokud existuje $C > 0$, že pro každá $x,y \in M$ platí*

$$C\,\rho(x,y) \le d(x,y) \le \frac{1}{C}\,\rho(x,y).$$

Říkáme, že dvě normy $||\cdot||$ a $|||\cdot|||$ na vektorovém prostoru V jsou ekvivalentní, pokud existuje $C>0$, že pro každé $x\in V$ platí

$$C\,||x|| \le |||x||| \le \frac{1}{C}\,||x||.$$

Například všechny p-metrky (normy) na $\mathbb{R}^d$ jsou (po dvou) ekvivalentní. Rovněž platí, že ekvivivalence metrik (norem) je relací ekvivalence.

Věta 38 (spojitost metriky na normy). *Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti v M pro které platí $\rho-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ a $\rho-\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Potom $\rho-\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\rho(x,y)$.*

Nechť $(V,||\cdot||)$ je normovaný lineární prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost ve V pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty}||x_n|| = ||x||$.

Definice 39 (okolí, otevřené a uzavřené množiny). *Nechť (M,ρ) je metrický prostor. Okolí bodu $x\in M$ s poloměrem $\varepsilon>0$ (v metrice ρ) definujeme jako*

$$U(x,\varepsilon)=\{y\in M:\rho(x,y)<\varepsilon\}.$$

Prstencové okolí bodu $x\in M$ s poloměrem $\varepsilon>0$ (v metrice ρ) pak definujeme jako

$$P(x,\varepsilon)=U(x,\varepsilon)\setminus\{x\}=\{y\in M:0<\rho(x,y)<\varepsilon\}.$$

Množinu $U\subseteq M$ nazveme otevřenou (vzhledem k ρ), pokud platí

$$\forall\, x\in U\ \exists\,\varepsilon>0\ :U(x,\varepsilon)\subseteq U.$$

Množinu $K\subseteq M$ nazveme uzavřenou (vzhledem k ρ), pokud je množina $M\setminus K$ otevřená (vzhledem k ρ).

Poznámky a příklady.

1. *okolí $U(x,\varepsilon)$ je vždy otevřená množina, uzavřený interval je uzavřená množina (v klasické metrice na $\mathbb{R}$). V metrice*

   $$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{pokud } x=y,\\ 1, & \text{pokud } x\neq y.\end{cases}$$

   je každá množina otevřená i uzavřená. V libovolném metrickém prostoru (M,ρ), jsou množiny $\varnothing$ a M uzavřené i otevřené.

2. *Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina: je-li $\{U_a\}$, $a\in A$, systém otevřených množin, je i $\bigcup\limits_{a\in A} U_a$ otevřená množina (ve stejné metrice),*

   Konečný průnik otevřených množin je otevřená množina: jsou-li $U_1,\dots,U_n$ otevřené množiny, je i $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ otevřená množina (ve stejné metrice).

Libovolný průnik uzavřených množin je uzavřená množina: je-li $\{K_a\}$, $a \in A$, systém uzavřených množin, je i $\bigcap_{a\in A} K_a$ uzavřená množina (ve stejné metrice),

konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina: jsou-li $K_1, \dots, K_n$ uzavřené množiny, je i $\bigcup_{k=1}^{n} U_k$ uzavřená množina (ve stejné metrice).

Definice 40 (spojitost v metrickém prostoru)**.** *Nechť (M, ρ) a (X, d) jsou dva metrické prostory, $\varphi : M \to X$, $a \in M$ a $A \subseteq M$, $a \in A$. Potom říkáme, že φ je*

- *spojité v bodě a, pokud platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall x \in U_\rho(a, \delta) : \varphi(x) \in U_d(\varphi(a), \varepsilon).$$

- *spojité v bodě a vzhledem k množině A, pokud platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall x \in U_\rho(a, \delta) \cap A : \varphi(x) \in U_d(\varphi(a), \varepsilon).$$

- *spojité, pokud je spojité ve všech bodech M,*
- *spojité vzhledem k A, pokud je ve všech bodech A spojité vzhledem k A.*

Věta 41 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť (M, ρ) a (X, d) jsou dva metrické prostory a $\varphi : M \to X$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *φ je spojité,*
2. *$\varphi^{-1}(U)$ je otevřená pro každou $U \subseteq X$ otevřenou,*
3. *$\varphi^{-1}(K)$ je uzavřená pro každou $K \subseteq X$ uzavřenou.*

Analogické tvrzení ovšem neplatí pro obraz, např. $\arctan x$ je spojitá a $\arctan(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ otevřená a $\sin x$ je spojitá a $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ je uzavřená (připomeňme, že množina $\mathbb{R}$ je (v $\mathbb{R}$) uzavřená i otevřená).

Definice 42 (hromadný a izolovaný bod)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $A \subset M$. Bod $a \in M$ nazveme hromadným bodem množiny A, pokud platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, x \in A : x \in P(a, \varepsilon).$$

Bod $a \in A$ nazveme izolovaným bodem množiny A, pokud není jejím hromadným bodem.

Definice 43 (vnitřek, uzávěr a hranice)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq M$. Potom definujeme*

- *uzávěr množiny A (vzhledem k ρ) jako průnik všech uzavřených množin v M obsahujících A (značíme $\overline{A}$),*

- *vnitřek množiny A (vzhledem k ρ) jako sjednocení všech otevřených množin v M obsažených v A (značíme A°),*
- *hranici množiny A (vzhledem k ρ) jako $\partial A = \overline{A} \cap \overline{M \setminus A}$ (alternativně $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$)*

Snadno nahlédneme, že $\overline{A}$ je vždy uzavřená množina (je to nejmenší uzavřená množina obsahující A), A° je vždy otevřená množina (je to největší otevřená množina obsažená v A) a ∂A je vždy uzavřená.

Pro $A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ platí

$$A^\circ = \{x^2 + y^2 < 1\}, \quad \partial A = \{x^2 + y^2 = 1\}, \quad \overline{A} = A = \overline{A^\circ}.$$

Poznamenejme, že poslední rovnost neplatí vždy (množina může mít prázdný vnitřek). Rovněž platí, že je-li a hromadným bodem A, pak $a \in \overline{A}$ ($\overline{A}$ je ve skutečnosti sjednocením A a všech jeho hromadných bodů).

Definice 44 (limita v metrickém prostoru)**.** *Nechť (M, ρ) a (X, d) jsou dva metrické prostory a $\varphi : M \to X$, $A \subseteq M$ a a hromadný bod A. Potom říkáme že $b \in X$ je*

- *limitou zobrazení φ v bodě a vzhledem k množině A (značíme $\lim_{A \ni x \to a} \varphi(x) = b$), pokud platí*

  $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x \in P_\rho(a, \delta) \cap A : \varphi(x) \in U_d(b, \varepsilon),$$

- *limitou zobrazení φ v bodě a (značíme $\lim_{x \to a} \varphi(x) = b$) pokud platí $\lim_{M \ni x \to a} \varphi(x) = b$.*

Poznámky a příklady. *1. pro takto definované limity platí mnoho vět, které známe u funkcí jedné proměnné (především jednoznačnost limity, limita složené funkce, Heineho věta, ale i mnoho dalších), pro případ $X = \mathbb{R}$ můžeme přidat i aritmetiku limit a dva strážníky.*

2. $\displaystyle \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ *neexistuje.*

Dále definujeme následující dvě důležIté třídy metrických prostorů:

- úplné prostory jako prostory pro které platí

  $$\{x_n\} \text{ konvergentní} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N : |x_n - x_m| < 0$$

  (tedy zhruba řečeno prostory, kde platí věta o Bolzano-Cauchyově podmínce)

- kompaktní prostory, kde zhruba řečeno platí Bolzano-Weierstrassova věta, tedy:

Definice 45 (kompaktní metrický prostor). *Metrický prostor (M, ρ) nazýváme kompaktní, pokud platí, že každá posloupnost v M má konvergentní podposloupnost (v M vzhledem k ρ).*

Platí, že $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor, $\mathbb{Q}$ není úplný, $[0,1]$ je kompaktní (Bolzano-Weierstrassova věta), $\mathbb{R}$ není kompaktní (vše s obvyklou metrikou na $\mathbb{R}$, rezp. zděděnou z $\mathbb{R}$).

Normované lineární prostory, které jsou úplné nazýváme Banachovy (např. $C([0,1])$), prostory se skalárním součinem, které jsou úplné pak Hilbertovy (např. l_2).

8 Funkce více proměnných

Definice 46 (parciální derivace). *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Parciální derivaci funkce f v bodě a vzhledem k i-té souřadnici (podle x_i) definujeme jako*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

pokud limita napravo existuje.

Parciální defivaci 2. řádu funkce f v bodě a vzhledem k i-té a následně j-té souřadnice pak definujeme jako $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ a značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$. Parciální derivace vyšších řádů definujeme analogicky.

Definice 47 (totální diferenciál). *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazýváme totálním diferenciálem (derivací) funkce f v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$) pokud platí*

$$\lim_{h \to (0,\dots,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|}.$$

Poznámky a příklady.

1. *Pro $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$ zpravidla používáme zápis $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ (a podobně pro derivace vyšších řádů).*

2. *Parciální derivace a totální diferenciál definujeme podobně i pro zobrazení $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, která derivujeme po složkách, tedy například*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(a)\right)^T.$$

3. *Označíme-li $\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|}$, $h \neq 0$, potom platí*

$$f(a+h) - f(a) = Lh + |h|\varphi(h),$$

kde $\varphi(h) \to 0$, pro $h \to 0$. Toto je triviální, ale velice užitečná reformulace definice totálního diferenciálu.

4. *Podobně jako parciální derivace definujeme i derivaci v obecném směru $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ jako*

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Platí tedy, že parciální derivace podle x_i je směrovou derivací ve směru e_i.

Věta 48 (vlastnosti totálního diferenciálu)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^d \supset D_f \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě a, potom platí*

1. *f je spojitá v a,*
2. *existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, d$ a platí $df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^d h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.*

Vektoru

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix}.$$

říkáme gradient funkce f v bodě a. Analogií gradientu pro zobrazení je Jacobiho matice (zobrazení F v bodě a) definovaná jako

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix},$$

přičemž opět platí $dF(a) \cdot h = J_f(a) \cdot h$.

Věta 49 (parciální derivace a totální diferenciál)**.** *Nechť f má všechny parciální derivace* 1. *řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^d$, potom*

1. *pokud existuje $C \in \mathbb{R}$, že $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| < C$, $i = 1, \dots d$, na nějakém okolí bodu a, potom f je spojitá v a*
2. *jsou-li všechny parciální derivace* 1. *řádu spojité v bodě a, potom f má v bodě a totální diferenciál.*

Věta 50 (diferenciál složeného zobrazení)**.** *Nechť $F : \mathbb{R}^d \supset D_F \to \mathbb{R}^m$ a $G : \mathbb{R}^m \supset D_G \to \mathbb{R}^k$ a nechť existují $dF(a)$ a $dG(F(a))$. Potom existuje $d(G \circ F)(a)$ a platí $d(G \circ F)(a)h = dG(F(a)) \cdot dF(a)h$, $h \in \mathbb{R}^d$.*

Poznámky a příklady. *1. Nechť pro $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují $f'(a)$ a $g'(a)$. Definujme $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jako $F = (f, g)$ a $G(u, v) = uv$. Potom podle výše uvedené věty dostaneme*

$$(fg)'(a) = \begin{pmatrix} g(a) & f(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{pmatrix} = g(a)f'(a) + f(a)g'(a),$$

tedy známé pravidlo o derivaci součinu.

Stejným způsobem můžeme dostat pro $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ pravidlo

$$d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$$

a obdobně můžeme získat i analogii klasického pravidla o derivaci podílu.

2. *(řetízkové pravidlo) pro speciální případ $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ a $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (tedy $g \circ F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$) dostaneme*

$$\frac{\partial (g \circ F)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_k}(F(a)) \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(a).$$

Věta o diferenciálu složeného zobrazení má jako důsledek i následující větu o střední hodnotě:

Věta 51 (o střední hodnotě). *Nechť $U \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $f : U \to \mathbb{R}$ a $df(a)$ existuje pro všechna $a \in U$. Potom pro každou dvojici $a, b \in U$ splňující*

$$L = \{(1-t)a + tb : t \in (0,1)\} \subset U$$

existuje $\gamma \in L$, že platí

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma)(b_k - a_k).$$

Věta 52 (o implicitní funkci). *Nechť $U \subset \mathbb{R}^{d+m}$ je otevřená, $F : U \to \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$, $F \in C^k(U)$, $(a,b) \in U$ ($a \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^m$). Předpokládejme, že $F(a,b) = 0$. Označme*

$$J_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_d}(a,b) \end{pmatrix} \quad a \quad J_U = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{d+1}}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{d+m}}(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{d+1}}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{d+m}}(a,b) \end{pmatrix}.$$

a $M = \{(x,u) \in U : F(x,u) = 0\}$ a předpokládejme, že platí

1. *$(a,b) \in M$,*
2. *$\det(J_U) \neq 0$.*

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ taková, že pro každé $x \in U(a,\delta)$ existuje právě jedno $u_x \in U(b,\Delta)$ takové, že $(x, u_x) \in M$. Navíc, označíme-li jako φ zobrazení přiřazující bodu $x \in U(a,\delta)$ bod u_x jako výše, je toto zobrazení $C^k(U(a,\delta))$ a platí

$$J_\varphi(a) = -J_U^{-1} J_X.$$

Poznámky a příklady. *1. (inverzní zobrazení) Nechť $V \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G : V \to \mathbb{R}^d$, $G \in C^1(V)$, $b \in V$, $\det J_G(b) \neq 0$. Definujme $F : \mathbb{R}^d \times V \to \mathbb{R}^d$ jako*

$$F(x,u) = G(u) - x, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^d \times V =: U \subset \mathbb{R}^{2d}.$$

Potom pro $a = (G(b), b)$ (a obvyklé značení pro J_X a J_U jako ve větě o implicitní funkci) platí

$$F(a) = G(b) - G(b) = 0, \quad \det J_U = \det J_G(b) \neq 0, \quad J_X = -\operatorname{Id}.$$

Tedy existuje $\delta > 0$ a zobrazení $\varphi : U(G(b),\delta) \to \mathbb{R}^d$, pro které platí $F(x,\varphi(x)) = 0$, $x \in U(G(b),\delta)$ a $\varphi(G(b)) = b$. To je ale totéž jako

$$G(\varphi(x)) = x, \quad x \in U(G(b),\delta).$$

Zobrazení φ je tedy inverzním zobrazením k zobrazení G na okolí bodu $G(b)$ (proto budeme psát G^{-1} místo φ). Navíc platí $G^{-1} \in C^1(U(G(b),\delta))$ a

$$J_{G^{-1}}(G(b)) = -J_U^{-1} J_X = -(J_G(b))^{-1}(-\operatorname{Id}) = (J_G(b))^{-1}.$$

Zobrazením $G \in C^1(U)$, pro která platí $\det J_G(x) \neq 0$, $x \in U$, říkáme regulární. V dimenzi jedna jsme si v zimním semestru dokázali existenci globální inverzní funkce k funkci f splňující například $f' > 0$ na intervalu. Ve vyšší dimenzi ovšem nemůžeme existenci globální inverze regulárních zobrazení očekávat, stačí uvážit zobrazení $G : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definovaného jako $G(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. To je regulární ($\det J_G(r,\varphi) = r > 0$), ale nemá globální inverzi.

8.1 Extrémy funkcí více proměnných

Extrémy u funkcí více proměnných definujeme analogicky jako v dimenzi 1.

Věta 53 (nutná podmínka pro lokální extrém)**.** *Pokud má f v bodě a lokální extrém a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Definice 54 (Hessova matice)**.** *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^d \supset D_f \to \mathbb{R}$ všechny derivace 2. řádu v bodě a. Hessovu matici funkce f v bodě a definujeme jako*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a) \end{pmatrix}$$

Věta 55 (záměnnost parciálních derivací)**.** *Nechť $f \in C^2(U)$, $a \in U$, potom pro $i,j \in \{1,\dots,d\}$ platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Spaciálně výše uvedená věta implikuje, že pro funkci $f \in C^2(U)$ a $a \in U$ je $H_f(a)$ symetrická matice.

Uspořádanou N-tici $\alpha = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}_0^N$ budeme nazývat multiindexem. Velikostí multiindexu α pak budeme nazývat hodnotu $|\alpha| = a_1 + \dots + a_N$. Dále definujeme

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{a_1! \cdots a_N!},$$

pro $f \in C^{|\alpha|}(U)$ a $a \in U$ derivaci funkce f v bodě a vzhledem k (podle) multiindexu α jako

$$D^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_N^{a_N}}(a)$$

a mocninu $x \in \mathbb{R}^N$ na multiindex α jako

$$x^\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}.$$

Definice 56 (Taylorův polynom). *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená, $N \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^N(U)$, $a \in U$. Taylorovým polynomem funkce f v bodě a stupně N budeme nazývat polynom*

$$T_{f,a}^N(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} D_f^\alpha(a)(x-a)^\alpha.$$

Věta 57 (Peanův tvar zbytku). *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená, $N \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^N(U)$, $a \in U$, potom platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{f,a}^N(x)}{|x-a|^N} = 0.$$

Lemma 58. *Nechť A je symetrická pozitivně definitní matice, potom existuje $\alpha > 0$, že $x^T A x \geq \alpha |x|^2$.*

Věta 59 (postačující podmínka pro lokální extrém). *Nechť $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(U)$, $a \in U$. Nechť navíc $\nabla f(a) = 0$, potom:*

- *je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, potom má f v a lokální minimum,*
- *je-li $H_f(a)$ negativně definitní, potom má f v a lokální maximum,*
- *je-li $H_f(a)$ indefinitní, potom f v a nemá lokální extrém.*

Definice 60 (extrémy vzhledem k množině). *Nechť $f : \mathbb{R}^d \supset D_f \to \mathbb{R}$, $M \subset D_f$, $a \in M$. Potom říkáme, že f má v bodě a*

- *lokální maximum vzhledem k množině M, pokud existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x \in P(a, \delta)$ platí $f(x) \leq f(a)$,*
- *globální maximum vzhledem k množině M, pokud pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(a)$.*

Analogicky definujeme i lokální a globální minimum f vzhledem k M a ostré varianty.

Věta 61 (o Lagrangeových multiplikátorech)**.** *Nechť $n, d \in \mathbb{N}$, $n < d$, $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g_1, \dots, g_n \in C^1(U)$. Položme $G = (g_1, \dots, g_n)$ a*

$$M = \{x \in G : G(x) = 0\}.$$

Nechť f má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:

1. *vektory $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ jsou lineárně závislé,*
2. *existují $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(a).$$

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ má v bodě z totální diferenciál. Definujme $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jako $f(x) = \nabla\varphi(z) \cdot x$ (tedy $f(x)$ je derivace φ v bodě z ve směru x). Položme $M = \mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$. Potom podmínka (ii) z předchozí věty (podmínka (i) není splněna nikdy) dává pro extrém f v bodě a vzhledem k M rovnici ($g(x) = x_1^2 + \cdots x_d^2 - 1$)

$$\nabla f(a) = \nabla\varphi(z) = 2\lambda(a_1, \dots, a_d).$$

Tedy extrémů vzhledem k M nabývá f v bodech $\pm\frac{\nabla\varphi(z)}{|\nabla\varphi(z)|}$. To odpovídá faktu, že $\nabla\varphi(z)$ udává směr největšího růstu (a $-\nabla\varphi(z)$ největšího klesání) funkce φ v bodě z.

Definice 62 (kompaktní množina)**.** *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $K \subseteq M$. Potom říkáme, že K je kompaktní, pokud je metrický prostor $(K, \rho|_{K\times K})$ kompaktní.*

Věta 63 (kompaktnost v $\mathbb{R}^d$)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je uzavřená a omezená (existuje $\delta > 0$, že $K \subset U(0, \delta)$), potom K je kompaktní.*

Jako důsledek pak platí, že je-li f spojitá vzhledem ke kompaktní množině M, pak vzhledem k M nabývá globálního maxima i globálního minima. Rovněž triviálně platí, že každá kompaktní množina je uzavřená a omezená.

Definice 64 (úplný metrický prostor)**.** *Metrický prostor (M, ρ) nazýváme úplný pokud každá posloupnost $\{x_n\} \subset M$ splňující podmínku*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

je konvergentní (tj. má limitu v M vzhledem k ρ).

Věta 65 (kontraktivní zobrazení)**.** *Nechť (M,ρ) je metrický prostor. Zobrazení $\Phi : M \to M$ nazýváme kontraktivní (kontrakce), pokus existuje $0 < r < 1$, že pro všechna $x, z \in M$ platí*

$$\rho(\Phi(x), \Phi(z)) \leq r\rho(x,z).$$

Věta 66 (Banachova o kontrakci)**.** *Nechť (M,ρ) je neprázvný úplný metrický prostor a $\Phi : M \to M$ kontrakce. Potom existuje právě jedno $x \in M$ pro které platí $\Phi(x) = x$ (tzv. pevný bod zobrazení Φ).*

Věta 67 (Picardova)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ je otevřená a $F : U \to \mathbb{R}^d$ a nechť navíc platí*

- *F je spojitá na U,*
- *pro každé $(a,b) \in U$ existují $\delta > 0$ a $L > 0$, že pro všechna $(x,u),(x,v) \in U((a,b),\delta)$ platí*
$$|F(x,u) - F(x,v)| \leq L|u-v|.$$

Potom pro každé $(a,b) \in U$ existuje $\delta > 0$, že rovnice

$$f'(x) = F(x, f(x))$$

má na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ právě jedno řešení splňující $f(a) = b$.